Risoluzioni libere di ideali determinantali

Federico Galetto

Northeastern University
Boston, MA

Welcome Home Workshop
Università degli Studi di Torino
21 Dicembre 2011

- $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$
- M A-modulo graduato finitamente generato

Definizione

Una risoluzione libera minimale di M è una sequenza di A-moduli liberi $F_i = A^{n_i}$ e mappe A-lineari $d_i : F_i \to F_{i-1}$

$$\ldots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0$$

tale che

- $F_0 / \operatorname{im} d_1 \cong M$
- $\ker d_i = \operatorname{im} d_{i+1}$
- le mappe d_i sono matrici di polinomi omogenei di grado $\geqslant 1$

Le risoluzioni libere minimali di A-moduli esistono, hanno lunghezza al più n e sono uniche a meno d'isomorfismo.

Esempio

$A = \mathbb{C}[x,y,z]$, $M = A/I$, $I = (x,y,z)$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & z & 0 \\ -x & 0 & z \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}} A$$

- la matrice d_1 contiene un insieme minimale di generatori di I
- la matrice d_2 contiene le relazioni fra i generatori:

$$\begin{aligned} {\color{red}y}x + {\color{red}(-x)}y &= 0 \\ {\color{red}z}x + {\color{red}(-x)}z &= 0 \\ {\color{red}z}y + {\color{red}(-y)}z &= 0 \end{aligned}$$

- la matrice d_3 contiene le relazioni fra le relazioni, etc.

La risoluzione libera minimale fornisce informazioni algebro/geometriche sul modulo in questione:

- generatori minimali
- relazioni minimali fra i generatori
- serie di Hilbert
- codimensione

Esempio

$A = \mathbb{C}[x, y, z]$, $M = A/I$, $I = (x, y, z)$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} A^3 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}} A$$

A/I è l'anello delle coordinate dell'origine dello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.

Introduciamo una matrice di coordinate per lo spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{mn}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Convenzione: $m \leqslant n$.

Definizione

La varietà determinantale Y_r è il luogo degli zeri dei minori di ordine $r+1$ di X. Equivalentemente, Y_r è l'insieme delle matrici $m \times n$ di rango al più r.

Esempio

$Y_m = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{mn}$
$Y_0 = \{0\}$

Esempio

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \mathcal{V}\left(\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \mathcal{V}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}, x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21}, x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22}) \subseteq \mathbb{A}^6_{\mathbb{C}}$$

$$0 \longrightarrow A^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_{13} & x_{23} \\ -x_{12} & -x_{22} \\ x_{11} & x_{21} \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\left(\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} \right)} A$$

dove $A = \mathbb{C}[x_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$.

$$0 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} = x_{11} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} - x_{12} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix} + x_{13} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

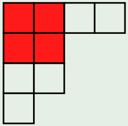
Una partizione è una sequenza $\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_i \geqslant \ldots$ di numeri naturali tale che

$$|\lambda| = \sum_i \lambda_i < \infty.$$

L'intero $|\lambda|$ è detto peso della partizione. Le partizioni sono rappresentate graficamente mediante diagrammi di Young.

Esempio

$\lambda = (42210)$, $|\lambda| = 9$



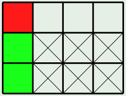
λ contiene un quadrato massimale 2×2.

Vogliamo la risoluzione di $Y_r \subseteq \mathbb{A}^{mn}_{\mathbb{C}}$. Sia $q = n - r$.
In una griglia $q \times m$, inscriviamo tutte le partizioni ammissibili ovvero quelle aventi un quadrato massimale $s \times s$ (allineato in alto a sinistra) che poggia su un rettangolo $s \times r$.

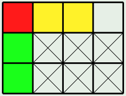
Esempio ($m = 3$, $n = 6$, $r = 2$, $q = 4$)

ammissibili

$s = 1$

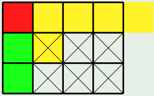


$s = 1$

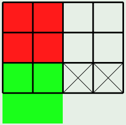


non ammissibili

$s = 1$

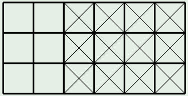


$s = 2$



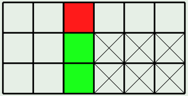
Esempio ($m = 3$, $n = 6$, $r = 2$, $q = 4$)

$s = 0$:

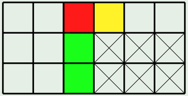


$\mu = (000)$
$\nu = (000000)$

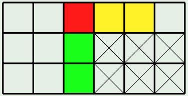
$s = 1$:



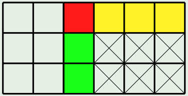
$\mu = (111)$
$\nu = (003000)$



$\mu = (211)$
$\nu = (003100)$



$\mu = (311)$
$\nu = (003110)$



$\mu = (411)$
$\nu = (003111)$

Inscriviamo la griglia $q \times m$ in una griglia $n \times m$ (allineata in alto a destra) ed associamo ad ogni partizione ammissibile due sequenze, μ e ν di lunghezza m ed n.

La sequenza ν non è una partizione ma induce una partizione $\tilde{\nu}$ operando "scambi" tra coppie crescenti di interi adiacenti.
Uno "scambio" manda la coppia a, b in $b-1, a+1$.

Esempio

$$
\begin{tikzcd}
\nu = (003000) \arrow[d, rightsquigarrow] \\
(021000) \arrow[d, rightsquigarrow] \\
\tilde{\nu} = (111000)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\nu = (003111) \arrow[d, rightsquigarrow] \\
(021111) \arrow[d, rightsquigarrow] \\
\tilde{\nu} = (111111)
\end{tikzcd}
$$

Alle partizioni μ e $\tilde{\nu}$ associamo due interi $s_\mu(m)$ e $s_{\tilde{\nu}}(n)$.

Esempio ($m = 3$, $n = 6$, $r = 2$, $q = 4$)

$\mu = (411)$, $s_{(411)}(3) = ?$

contenuto
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -1 \\ \cline{1-1} -2 \\ \cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{+3} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

"ganci"
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

quozienti
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1/2 & 4/3 & 5/2 & 6 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$s_{(411)}(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot 6 = 10$$

Esempio ($m = 3$, $n = 6$, $r = 2$, $q = 4$)

μ	(000)	(111)	(211)	(311)	(411)
$\lvert\mu\rvert$	0	3	4	5	6
s	0	1	1	1	1
$\tilde{\nu}$	(000000)	(111000)	(111100)	(111110)	(111111)
$s_\mu(m)$	1	1	3	6	10
$s_{\tilde{\nu}}(n)$	1	20	15	6	1
$s_\mu(m)s_{\tilde{\nu}}(n)$	1	20	45	36	10
$\lvert\mu\rvert - rs$	0	1	2	3	4

$$0 \longrightarrow A^{10} \longrightarrow A^{36} \longrightarrow A^{45} \longrightarrow A^{20} \longrightarrow A$$

Nella risoluzione di $Y_r \subseteq \mathbb{A}^{mn}_{\mathbb{C}}$,

$$F_{|\mu|-rs} = A^{s_\mu(m)s_{\tilde{\nu}}(n)}.$$

Il gruppo $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agisce sullo spazio di matrici $\mathbb{A}^{mn}_{\mathbb{C}}$ via cambi di base:

$$(G, H) \cdot X = GXH^{-1}.$$

Quest'azione ha un numero finito di orbite $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$ dove $\mathcal{O}_t$ è l'insieme delle matrici di rango t.
La varietà determinantale Y_r è

$$\mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{O}_r$$

ovvero $Y_r = \overline{\mathcal{O}}_r$ nella topologia di Zariski.
Il gruppo $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agisce su Y_r e l'azione si estende a tutti i termini della risoluzione. In particolare, le matrici della risoluzione sono compatibili con l'azione e ciò permette di identificarle completamente.

Rappresentazioni con un numero finito di orbite

gruppo	$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	gruppi di Lie riduttivi
rappresentazione	$\mathbb{A}^{mn}_{\mathbb{C}}$	opportuni sottospazi di algebre di Lie
varietà	Y_r	chiusura delle orbite
tecniche	algebra commutativa, geometria algebrica, teoria delle rappresentazioni, combinatoria	$+$ algebra computazionale

A breve su arXiv "Free resolutions of orbit closures for representations with finitely many orbits" con le risoluzioni per i gruppi eccezionali E_6 e F_4.
Per un'anteprima: `www.math.neu.edu/~fgaletto`.